

This question paper contains 7 printed pages]

HPAS (Main)—2017

MATHEMATICS

Paper II

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note :— The question paper has 8 questions. Answer any 5 questions. Question No. 1 is compulsory.

प्रश्नपत्र में 8 प्रश्न दिये गये हैं। किन्हीं 5 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न क्रमांक 1 अनिवार्य है।

Note :— Use of Scientific non-programmable calculator will be allowed in this paper.

1. (a) If $a \neq e$ is the only element of order 2 in a group G , then prove that $ax = xa \forall x \in G$.

यदि $a \neq e$ ग्रुप G में केवल एक ही अवयव कोटि 2 का है, तो सिद्ध कीजिए कि $ax = xa \forall x \in G$ ।

(b) Let p_1 and p_2 be two partitions of $[a, b]$, then show that :

$$L(f, p_1) \leq U(f, p_2) \text{ and } L(f, p_2) \leq U(f, p_1)$$

माना p_1 और p_2 $[a, b]$, के दो विभाजन हैं, तब प्रदर्शित कीजिए कि :

$$L(f, p_1) \leq U(f, p_2) \text{ और } L(f, p_2) \leq U(f, p_1)$$

P.T.O.

- (c) Evaluate Laplace transform of the following functions :

$$f(x) = (x + 2)^2 e^x.$$

निम्न फलन का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = (x + 2)^2 e^x.$$

- (d) On what curves can the functional

$$f[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \text{ be}$$

extremized ?

$$\text{किस वक्र पर फलनीय } f[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx,$$

$y(0) = 0, y(1) = 1$ चरमीय होगा।

2. (a) Prove that finite group of prime order does not have any proper subgroup.

सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि के परिमित समूह का कोई उचित उपसमूह नहीं होता है।

- (b) Prove that the kernel of a homomorphism f of a group G to a group G' is a normal subgroup of G .

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G से समूह G' पर परिभाषित किसी समाकारिता f की अष्टि, G का एक विशिष्ट उपसमूह है।

3. (a) Let a real valued function f be defined on $[0, 1]$ by $f(x) = x \forall x \in [0, 1]$ show that f is R-integrable over $[0, 1]$ and $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$.

माना $[0, 1]$ पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन f इस प्रकार से परिभाषित है कि $f(x) = x \forall x \in [0, 1]$, प्रदर्शित कीजिए कि f , $[0, 1]$ पर रीमान-समाकलनीय है एवं $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ ।

- (b) Test the convergence of the following integral :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \quad (a \geq 0)$$

निम्न समाकलन के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \quad (a \geq 0)$$

4. (a) If (A, d) be a metric space then :

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

यदि एक (A, d) दूरीक समष्टि है, तो

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

- (b) Test the convergence of the following series :

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + \dots$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + \dots$$

5. (a) Prove that the function $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ is harmonic and obtain its conjugate.

सिद्ध कीजिए कि फलन $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ प्रसंवादी है तथा इसका संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

- (b) Evaluate :

$$\int \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz$$

where C is the circle $|z - 1| = 4$.

मान ज्ञात कीजिए

$$\int \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz$$

जहाँ C एक वृत्त $|z - 1| = 4$ है।

6. (a) Solve the following equation by Charpits method :

$$(p^2 + q^2) y = qz .$$

निम्न समीकरण को चार्पी की विधि से हल कीजिए :

$$(p^2 + q^2) y = qz .$$

(b) Solve :

$$x^2r + 2xy + y^2q = 0$$

हल कीजिए :

$$x^2r + 2xy + y^2q = 0$$

7. (a) Show that :

$$L \left\{ \int_0^x \frac{1 - e^{-u}}{u} du, p \right\} = \frac{1}{p} \log \left(1 + \frac{1}{p} \right)$$

प्रदर्शित कीजिए :

$$L \left\{ \int_0^x \frac{1 - e^{-u}}{u} du, p \right\} = \frac{1}{p} \log \left(1 + \frac{1}{p} \right)$$

(b) Apply the convolution theorem to find :

$$L^{-1} \left\{ \frac{p^2}{(p^2 + a^2)^2}, x \right\}$$

कोनवोल्यूशन प्रमेय का प्रयोग कर $L^{-1} \left\{ \frac{p^2}{(p^2 + a^2)^2}, x \right\}$

का मान ज्ञात कीजिए।

8. (a) Find the path on which a particle, in the absence of friction, will slide from one fixed point to another point not in the same vertical line in the shortest time under action of gravity.

एक कण का पथ ज्ञात कीजिए जो घर्षण रहित, समान ऊर्ध्वाधर रेखा में नहीं है, एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु को गुरुत्व के अधीन, न्यूनतम समय में फिसलता है।

- (b) Find the root of the equation $x \log_{10}^x - 1.2 = 0$ correct to four places of decimals.

समीकरण $x \log_{10}^x - 1.2 = 0$ के मूल का चार दशमलव के स्थान तक मान ज्ञात कीजिए।